II Površi u prostoru

7 Definicije površi i jednačine površi

Površ S ($S \subseteq \mathbb{R}^3$) se zadaje parametarski na sljedeći način:

$$S : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in \Delta; \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

(skalarni oblik), ili

$$S : \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

(vektorski oblik), gdje je Δ dvodimenzionalni povezan skup u ravni $u0v$, a $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ su funkcije dvije promjenjive koje su diferencijabilne, injektivne (ili 1-1) za koju vrijedi da je $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ gdje je

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}.$$

Ostali oblici jednačina površi S su

$$S : z = z(x,y), \quad (x,y) \in D \ (D \subseteq x0y)$$

(eksplicitni oblik);

$$S : F(x,y,z) = 0$$

(implicitni oblik).

1. Ravan $z = 0$ napisati u parametarskom obliku. Poslije toga istu ravan napisati u obliku

$$\{\vec{a}\lambda + \vec{b}\mu + \vec{c} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ neki konstantni vektori}\}.$$

2. Ravan $x + y = 0$ napisati u parametarskom obliku. Poslije toga istu ravan napisati u obliku

$$\{\vec{a}\lambda + \vec{b}\mu + \vec{c} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ neki konstantni vektori}\}.$$

3. Posmatrajmo jednakost

$$\vec{r} = \{u \cos v, u \sin v, (k^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Koju površ ova jednakost predstavlja? Odrediti koordinatne krive $u = const.$ i $v = const.$ Dati geometrisko tumačenje parametara u i v.

4. Date su površi Γ i kriva L:

$$\Gamma : \vec{r} = \{u \cos v, u \sin v, au\}$$

$$L : \vec{r} = \{e^t \cos bt, e^t \sin bt, ae^t\}$$

gdje su a i b proizvoljne konstante.

(a) Napisati jednačinu površi Γ u obliku $F(x,y,z) = 0$.

(b) Dokazati da kriva L leži na površi Γ. Na kom njenom dijelu?

(c) Dokazati da je u proizvoljnoj tački na L ugao između L i v linije koja prolazi kroz tu tačku, konstantan.

[Odg. za 1: $x = \lambda, y = \mu, z = 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\{(1,0,0)^\top \lambda + (0,1,0)^\top \mu \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$]
[Odg. za 2: $x = \lambda, y = -\lambda, z = \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\{(1,-1,0)^\top \lambda + (0,0,1)^\top \mu \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$]